

Пермогорский М.С., Поддяков А.Н. Понимание нетранзитивности превосходства и разработка учебных «нетранзитивных» материалов и задач



English version: [Permogorskiy M.S., Poddiakov A.N. Understanding of intransitivity of superiority, and design of teaching-learning “nontransitive” materials and problems](#)

Высшая школа экономики, Москва, Россия

Центр прогнозирования и проектирования образовательных систем «Федеральный институт развития образования», Москва, Россия

[Сведения об авторах](#)

[Литература](#)

[Ссылка для цитирования](#)

Рассматривается понимание отношений транзитивности-нетранзитивности превосходства (всегда ли, если первое превосходит второе по определенному признаку, а второе превосходит третье, то первое превосходит третье по указанному признаку) и овладение этими отношениями. Обосновывается тезис, что опора на правило транзитивности как на аксиому и использование в обучении только тех объектов и ситуаций, на которые распространяется это правило, может формировать у учащихся ложные представления о его универсальности. Это может приводить к ошибочным умозаключениям о превосходстве в ситуациях сравнения объектов, объективно находящихся в нетранзитивных (циклических) отношениях превосходства (по принципу «камень-ножницы-бумага»). Констатируется асимметрия учебных разработок в данной области, и описываются учебные задания и «нетранзитивные» объекты, призванные компенсировать эту асимметрию.

Ключевые слова: транзитивность-нетранзитивность отношений превосходства, обучение, конструирование задач, решение задач

Одной из основных линий развития человеческого мышления является формирование способности к умозаключениям, с помощью которых люди выводят новое знание из уже известного. В психологии и педагогике широко изучается влияние различных культурных средств на развитие этой способности, в частности логических правил, овладению которыми в учебном процессе уделяется повышенное внимание. В данной работе речь пойдет о специфике овладения человеком областью транзитивных-нетранзитивных отношений.

Транзитивность, нетранзитивность, антитранзитивность: определение понятий

Термин «транзитивность» происходит от латинского *transitus*, что означает «переход».

Применительно к логике речь идет о возможности вынесения верного суждения типа: «Если $A > B$ и $B > C$, то $A > C$ », или, в более общем виде, суждения об определенном отношении между двумя объектами на основе уже известных верных суждений о существовании указанного отношения между каждым из этих двух объектов и каким-либо общим третьим. Проще говоря, речь идет о том, распространяется ли, переходит ли на пару объектов $A-C$ определенное отношение, существующее между парами объектами $A-B$ и $B-C$. По основанию транзитивности все отношения могут быть подразделены на транзитивные, антитранзитивные и нетранзитивные [Федоров и др., 1996].

Транзитивным называется такое отношение, из наличия которого между элементами (**a**, **b**) и элементами (**b**, **c**) следует наличие того же отношения между элементами (**a**, **c**), формально:

$$\forall a, b, c \in X, aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$$

Таковыми являются отношения эквивалентности, параллельности прямых, логического следования, делимости, включения подмножества и некоторые другие. Задачи на усвоение этого свойства отношений и овладение транзитивными умозаключениями даются уже на самых ранних этапах обучения. Типовой пример: «Миша выше Васи. Вася выше Бори. Кто из них самый высокий? Кто из мальчиков выше: Миша или Боря?». Логика правильных рассуждений очевидна для любого нормально развитого взрослого – Миша выше Васи, Вася выше Бори, значит, Миша выше Бори, и он самый высокий.

Антитранзитивным называется такое отношение, наличие которого между элементами (**a**, **b**) и элементами (**b**, **c**) исключает возможность наличия этого же отношения между элементами (**a**, **c**), формально:

$$\forall a, b, c: aRb \wedge bRc \Rightarrow \neg(aRc).$$

В качестве примеров, выраженных в понятиях естественного языка, можно назвать такие отношения, как «быть биологическим отцом», «быть старше на год» [Федоров и др., 1996], «быть вассалом» («вассал моего вассала – не мой вассал») и некоторые другие. Логика рассуждений в этих случаях очевидна: если А – биологический отец В, а В – биологический отец С, то А никак не может быть биологическим отцом С, поскольку А – дедушка С. Если А старше на год В, а В старше на год С, то А никак не может быть старше на год С, поскольку А старше С на 2 года.

Нетранзитивным называется такое отношение, наличие которого между элементами (**a**, **b**) и элементами (**b**, **c**) не позволяет определенно утверждать о наличии этого же отношения между элементами (**a**, **c**), формально:

$$\neg \forall a, b, c: aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$$

Таковым является отношение неравенства: если элемент **a** не равен элементу **b** и элемент **b** не равен элементу **c**, то элемент **a** может быть как равен, так и не равен элементу **c**. В качестве примеров, выраженных в понятиях естественного языка, можно назвать такие отношения, как «быть другом», «любить», «поедать» и некоторые другие.

Овладение логической операцией транзитивности превосходства в онто- и филогенезе

Среди правил классической логики есть правило транзитивности отношения превосходства: если первое превосходит второе в определенном отношении (по определенному признаку), а второе превосходит третье, то первое превосходит третье в указанном отношении. Например, если первое выше (или быстрее, сильнее, дороже и т.д.) второго, а второе выше (или быстрее, сильнее, дороже и т.д.) третьего, то первое гарантированно выше (или быстрее, сильнее, дороже и т.д.) третьего – без алогичного заикливания «третье выше (или быстрее, сильнее, дороже и т.д.) первого». В классической логике считается, что следование этому аксиоматическому правилу гарантирует совершение верных умозаключений о превосходстве одних объектов над другими.

Овладение логической операцией транзитивности рассматривается как один из важнейших этапов интеллектуального развития человека. Оно связано с формированием логического мышления, с пониманием сущности измерений, принципов сохранения по Пиаже [Пиаже, 2003] и т.д. В исследованиях онтогенетического развития интеллекта показано, что первые транзитивные умозаключения начинают осуществляться примерно с 5 лет, а некоторые виды задач на транзитивность умозаключений могут решать дети и более младшего возраста [Bryant, Trabasso,

1971; Mou et al., 2014]. Способность к транзитивной логике обнаружена также у некоторых видов приматов, крыс, птиц и даже рыб (например: [Gillian, 1981; Davis, 1992; Bond et al., 2003; Lazareva et al., 2004; Paz-y-Mico et al., 2004; Grosenick et al., 2007; MaClean et al., 2008]). И хотя нет никаких свидетельств того, что животные и маленькие дети используют ее с полноценной осознанностью, с эволюционной точки зрения эта способность является крайне полезным приобретением. Она позволяет живому организму снизить временные и энергетические затраты, необходимые для анализа ситуации и реагирования на значимые раздражители окружающей среды. Если субъекту известно, что объект А находится в определенном отношении с объектом В, а объект В находится в том же отношении с объектом С, то логическая операция транзитивности позволяет делать вывод об отношении между объектами А и С без необходимости тратить время и силы на проведение специального исследования этой пары. В частности, животным это позволяет выбирать в конкурентной борьбе более слабых соперников и избегать схваток с более сильными, что естественным образом снижает риск получения серьезных телесных повреждений [Paz-y-Mico et al., 2004; Grosenick et al., 2007], выбирать самые большие плоды и тем самым обеспечивать себя едой на более длительный временной период, а людям – не только сравнивать объекты между собой по определенному признаку и выбирать среди них наиболее предпочтительные, но и определять наличие родственных, дружеских или каких-либо иных связей внутри некоторой группы людей, совершать дедуктивные умозаключения и т.д. Диапазон такого типа ситуаций весьма велик.

Нетранзитивность превосходства: отношения по принципу «камень-ножницы-бумага» и их понимание человеком

Вместе с тем многочисленные работы показывают, что те или иные объекты реальности могут находиться и в объективно циклических отношениях превосходства (нетранзитивных), то есть первое в определенном отношении (по определенному признаку) превосходит второе, второе превосходит третье, но третье превосходит первое в указанном отношении (обзор примеров см.: [Гарднер, 1990; Поддьяков, 2006; Bar-Hillel, Margalit, 1988; Poddiakov, Valsiner, 2012; Пермогорский, 2014; Roberts, 2004]. Из наиболее интуитивно понятных упомянем здесь следующие. В последние два десятилетия в биологических журналах, в том числе в "Nature", была опубликована серия статей со словами «камень-ножницы-бумага» (rock-paper-scissors games) в заголовках. В этих исследованиях показано, как, например, один вид микроорганизмов вытесняет с территории второй вид, этот второй вытесняет третий, а тот, в свою очередь, вытесняет первый. Отношения «бойцовой силы» между разными видами нетранзитивны [Boddy, 2000; Kerr et al., 2002; Kirkup, Riley, 2004; Reichenbach et al., 2007]. Найдены виды ящериц, самцы которых используют «нетранзитивные» стратегии борьбы с другими самцами за самок – «сила», «обман» и «кооперация», воспроизводящие логику отношений «камень-ножницы-бумага» [Sinervo, Lively, 1996]. Нарушения правила транзитивности превосходства обнаружены и во множестве других областей.

Применительно к ситуациям нетранзитивности превосходства (доминирования, управления) между различными стратегиями (биологическими видами, отдельными субъектами, их группами – например, спортивными командами и т.д.) мы разработали следующую обобщенную модель структуры объектов, включенных в такие отношения [Поддьяков, 2006; Poddiakov, 2009]. Эта структура включает:

- а) средства, имеющиеся у одного объекта (субъекта), для воздействия на другой;
- б) зоны, чувствительные к воздействию другого объекта (субъекта);
- в) зоны, нечувствительные к воздействию другого объекта (субъекта), «закрытые» для него.

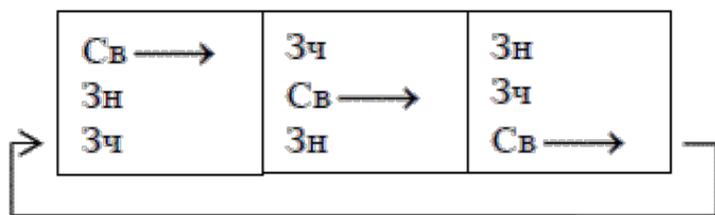


Рис. 1. Обобщенная структура объектов, находящихся в нетранзитивных отношениях превосходства (доминирования, управления).

Примечания. Св – средства, имеющиеся у одного объекта, для воздействия на другой; Зч – зоны, чувствительные к воздействию; Зн – зоны, нечувствительные к нему.

Эта модель объясняет очень многие ситуации нетранзитивности превосходства (доминирования, управления) как при конкуренции, так и при кооперации.

Существуют строгие математические доказательства нетранзитивности превосходства применительно к тем или иным классам объектов. Один из самых известных примеров – «нетранзитивные» игральные кости Б.Эфрона [Богданов, 2010; Гарднер, 1988; 1990; Bar-Hillel, Margalit, 1988; Roberts, 2004]. В.А.Петровский удачно назвал эти наборы «бойцовским клубом игровых кубиков». Рассмотрим, например, набор из 4 игровых кубиков со следующими числами на гранях [Ainley, 1978; цит. по: Roberts, 2004, с. 62].

Кубик А: 7, 7, 7, 7, 1, 1
 Кубик В: 6, 6, 5, 5, 4, 4
 Кубик С: 9, 9, 3, 3, 3, 3
 Кубик D: 8, 8, 8, 2, 2, 2

Можно убедиться, что в этом «бойцовском клубе» каждый предшествующий кубик в среднем выигрывает в 2 раза больше партий у последующего, чем проигрывает ему, но при этом последний кубик D выигрывает в той же пропорции у кубика А. (Выигрышем считается выпадение большего числа на верхней грани кубика.) Тем самым можно утверждать, что эти кубики «нетранзитивны»: если правила позволяют, то при возможности выбора из пары кубиков А и В надо выбрать А, оставив сопернику «более проигрышный» кубик В; при выборе между В и С надо выбирать В; при выборе между С и D надо выбирать С; но при выборе между D и А надо выбирать D. Доказано, что аналогичные наборы могут образовывать не только кубики, но и произвольное число игровых костей с другим числом граней (например, тетраэдров), рулеток с тем или иным числом секторов и т.п. [Богданов, 2010]. Подробный обзор и логико-математический анализ различных парадоксов такого рода дан в [Bar-Hillel, Margalit, 1988]. Заметим – это не просто математические забавы. Например, парадоксальная нетранзитивность отношения «чаще оказываться больше» может иметь фундаментальное значение для самых разных ситуаций.

М.Бар-Хиллел и А.Маргалит считают, что те или иные объекты реальности вполне могут находиться в нетранзитивных отношениях превосходства, – и приводят множество подтверждающих примеров. Но, считают эти авторы, в отличие от отношений между объектами рациональные предпочтения человека должны быть транзитивны всегда. Поясним это внешне противоречивое, но очень разумное рассуждение на следующем примере. Предпочтения «выиграть 5 денежных единиц», «остаться при своих», «проиграть 5 денежных единиц» должны быть строго транзитивны: первое предпочтительнее второго, второе – третьего и т.д. – без алогичного заикливания «последнее предпочтительнее первого». Но поскольку в ряде случаев выбираемые опции объективно находятся именно в нетранзитивных отношениях превосходства, то реализация по отношению к ним рационального принципа транзитивности предпочтений ведет к нетранзитивным выборам (например, к нетранзитивным выборам нетранзитивных костей), которые в такой ситуации совершенно логичны и рациональны. Эта, с нашей точки зрения, очень здравая мысль почему-то редко

фигурирует в рассуждениях оппонентов.

В целом обнаружение объективной нетранзитивности превосходства в различных предметных областях и построение различных формальных моделей и доказательств этой нетранзитивности привело к поляризации исследователей, занимающихся проблемой транзитивности-нетранзитивности. Фактически можно говорить о транзитивно-ориентированной и нетранзитивно-ориентированной парадигмах исследований. В транзитивно-ориентированной парадигме исследователи жестко отстаивают «аксиому транзитивности» или по крайней мере утверждают, что потери при отказе от нее будут больше, чем при ее сохранении. Они считают, что на самом деле, если глубоко разобраться и тонко учесть все факторы ("taking all considered"), нетранзитивность превосходства окажется иллюзией, следствием ошибочных рассуждений и неправильно интерпретированных наблюдений. В транзитивно-ориентированной парадигме доказывается, что как раз транзитивность превосходства – это всего лишь результат выдергивания и искусственной изоляции короткой цепочки превосходств из более общего цикла взаимодействий, в котором они реально существуют. С нашей точки зрения, прав П.Фишбурн: он сравнивает «транзитивно» и «нетранзитивно ориентированные» научные представления с евклидовой и неевклидовой геометрией и пишет, что отрицание нетранзитивности превосходства аналогично отрицанию неевклидовой геометрии [Fishburn,1991].

Мы считаем, что следует различать 4 типа ситуаций, связанных с: а) объективностью отношений транзитивности-нетранзитивности и б) их субъективной оценкой человеком [Поддьяков, 2006].

1-й тип: отношения превосходства между рассматриваемыми системами (элементами и т.д.) объективно транзитивны, и субъект правильно оценивает их как транзитивные, используя классическую логику сравнения и нормативный принцип транзитивности.

2-й тип: отношения превосходства объективно транзитивны, но субъект ошибочно оценивает их как нетранзитивные (это ситуации, моделируемые в экспериментах школы А.Тверски [Tversky, 1969]).

3-й тип: отношения превосходства объективно нетранзитивны, но субъект ошибочно оценивает их как транзитивные.

4-й тип: отношения превосходства объективно нетранзитивны, и субъект правильно оценивает их как нетранзитивные.

В психологии крайне мало экспериментальных исследований мышления в ситуациях 3-го и 4-го типов: когда рациональны именно нетранзитивные выборы, а следование аксиоме транзитивности является ошибкой. Доминируют же исследования мышления в ситуациях 1-го и 2-го типов, объективно требующих лишь транзитивных выборов, и, соответственно, исследования ошибок, связанных с нарушением принципа транзитивности. Стремясь изменить эту, с нашей точки зрения, неоправданную асимметрию, мы провели серию своих исследований в этой области.

Был разработан опросник представлений о нетранзитивности превосходства, а также комплекс экспериментальных объектов, демонстрирующих нетранзитивные детерминистские отношения превосходства [Поддьяков, 2011]. Проведенная с этими материалами серия исследований показала, что представления о нетранзитивных отношениях превосходства являются предметно-специфическими: участники допускают существование одних объектов, находящихся в нетранзитивных отношениях превосходства, и не допускают существования других (хотя реально они тоже возможны). Правило транзитивности превосходства если и используется участниками, то выборочно – для тех или иных областей и объектов [Там же]. Также было показано, что до 70% взрослых нормально развитых людей допускают ошибки при решении задач, связанных с пониманием нетранзитивности отношений, поскольку определяют эти отношения как транзитивные [Пермогорский, 2015].

Проблема понимания транзитивности-нетранзитивности «заключается в том, чтобы определить, какие отношения транзитивны, а какие нет, и впоследствии найти общие правила, позволяющие распознавать эти отношения в различных ситуациях» [Roberts, 2004, p. 63, цит. по: Поддьяков, 2011, с. 194]. Эта простая по формулировке задача в действительности имеет множество «подводных камней». В частности, отношения превосходства транзитивны в случае сравнения объектов, описываемых одной одномерной характеристикой (длиной, скоростью, массой и т.д.), что позволяет линейно упорядочивать эти объекты между собой по этому критерию при прочих равных. Формально, $a > b \Rightarrow a = b + N_1$, $b > c \Rightarrow b = c + N_2$, где N_1 и N_2 – разность между объектами на выбранной одномерной шкале сравнения; $N_1 > 0$, $N_2 > 0$. Из этого следует, что $a = c + N_1 + N_2$, следовательно, $a > c$. Однако здесь необходимо учитывать, что в естественных языках большинство понятий, которые могут выступать в качестве отношения между объектами, не являются арифметическими или не имеют эквивалента арифметической операции, а спецификации, напротив, могут вводить в заблуждение. Не меньшую трудность представляет и степень сложности объектов. Проблемы сравнения не элементарных, а сложных объектов реальности во многом связаны с тем, что они описываются многомерным пространством характеристик (как четко сформулированных, так и неявных). Возможные сочетания и конфигурации этих характеристик ведут к сложно прогнозируемым результатам. В целом проблема установления транзитивности-нетранзитивности превосходства является алгоритмически неразрешимой [Поддьяков, 2006]. Под алгоритмической неразрешимостью понимается строго доказанное принципиальное отсутствие общего метода решения для множества однотипных, корректно поставленных массовых задач, относящихся к одному классу. Однотипность задач подразумевает лишь однотипность условий и требований, но не методов решения. Вместе с тем отсутствие общего метода решения не отменяет возможности решения отдельных задач, относящихся к этому классу.

Решение алгоритмически неразрешимых задач всегда требует творческого мышления [Поддьяков, 2006]. Учитывая это, а также тезис П.Фишбуерна, что соотношение «транзитивно-ориентированного» и «нетранзитивно ориентированных» подходов аналогично соотношению евклидовой и неевклидовых геометрий, представляющих разные уровни развития знания, можно полагать, что для понимания того, как люди решают задачи на транзитивность-нетранзитивность, необходимо опираться и на аппарат теорий творческого мышления – например, структурно-уровневую теорию развития мышления Я.А.Пономарева [Ушаков и др., 2011].

Самостоятельный вопрос: как можно способствовать развитию этого понимания в ходе обучения.

Необходимость развития понимания нетранзитивности в обучении

В настоящее время в сфере обучения (как и в исследованиях) тотально доминируют такое содержание и такие задачи, в которых требуется использование исключительно правила транзитивности превосходства. Возможно, их объемы на начальных этапах действительно должны доминировать (аналогия: чтобы понять что-то в неевклидовой геометрии, надо вначале понять какие-то основы евклидовой) – этот вопрос заслуживает обсуждения. Но вряд ли удовлетворительна нынешняя ситуация, когда в очень многих учебниках и пособиях транзитивность превосходства представлена как аксиома – без сообщения о границах применимости этого правила и о классах случаев, где оно не соблюдается. Человек, усвоивший этот принцип как аксиому, не будет готов к столкновению со случаями закономерной нетранзитивности превосходства. В этих ситуациях ему будет затруднительно сделать правильный выбор. Что немаловажно, ему может понадобиться, например, значительно больше времени, чтобы понять суть некоторых мошенничеств, основанных как раз на нетранзитивности превосходства. Но и в ситуациях, не связанных с мошенничеством или борьбой, понимание нетранзитивности может оказаться существенно важным.

Одним из инструментов развития мышления в этой области может быть обучение решению специально разработанных задач с использованием объектов, находящихся в нетранзитивных отношениях превосходства. Эта позиция все чаще появляется в научной полемике [Beardon, n.d.; Roberts, 2004; Поддьяков, 2006, 2011]. Ниже представлены некоторые из таких задач.

Примеры учебных материалов и заданий, требующих понимания

нетранзитивности превосходства

Вероятно, впервые на систематической основе примеры нетранзитивности превосходства представил для читателей, интересующихся математикой (хотя и не профессиональных математиков), выдающийся популяризатор математики М.Гарднер в своем разделе «Математические игры» журнала *Scientific American* [Gardner, 1974] (русский перевод: [Гарднер, 1990, с. 67–84]). Более ранние примеры в научно-популярной и учебной литературе для нематематиков нам не встречались (хотя, возможно, они есть).

Проблема в том, что многие представленные М.Гарднером парадоксы и задачи все-таки требуют относительно высокого уровня математической подготовки и культуры математического мышления (например, понимания соотношения вероятностей и умения работать с ними). В программе средней школы элементы теории вероятностей даются лишь в старших классах.

В обучающих проектах для младшей школы может быть использован специальный комплекс учебных материалов и заданий, разработанный А.Н.Поддьяковым [2011]. Опишем подробнее некоторые из них.

Нетранзитивные геометрические пластины

Три вида пластин сконструированы таким образом, что пластина А при касании выводит из равновесия (падает на) пластину В, аналогично пластина В выводит из равновесия (падает на) пластину С, но пластина С выводит из равновесия (падает на) пластину А.

Нетранзитивные фигуры животных

Три фигурки животных сконструированы таким образом, что животное А кормит с ложки / чистит зубы / кланяется животному В, животное В кормит с ложки / чистит зубы / кланяется С, но животное С кормит с ложки / чистит зубы / кланяется животному А.

Нетранзитивные «гуляй-башни»

Три вида игрушечных «гуляй-башен» (или передвижных «таранов» с маркерами) сконструированы так, что «гуляй-башня» А оставляет при столкновении цветную метку на «гуляй-башне» В (сама оставаясь непомятой), «гуляй-башня» В аналогично помечает «гуляй-башню» С, но «гуляй-башня» С помечает «гуляй-башню» А (рис. 2).

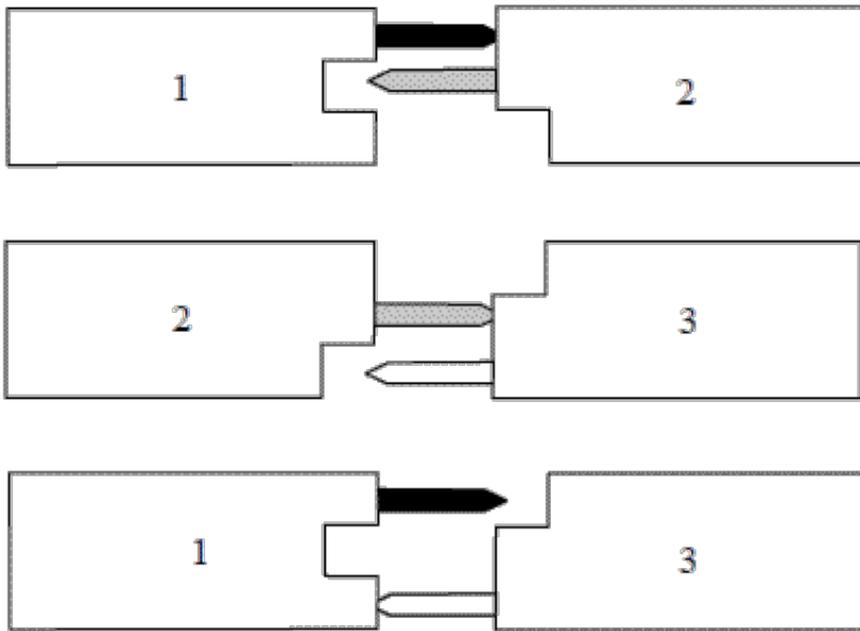


Рис. 2. «Гуляй-башни», поражающие друг друга «по кругу».

Примечания. 1-я «гуляй-башня» побеждает 2-ю, 2-я побеждает 3-ю, а 3-я побеждает 1-ю.

Нетранзитивные шестерни

Три вида шестеренок на осях скомпонованы так, что при их попарном соединении ось А вращается быстрее оси В, ось В вращается быстрее оси С, но ось С вращается быстрее оси А (рис. 2).

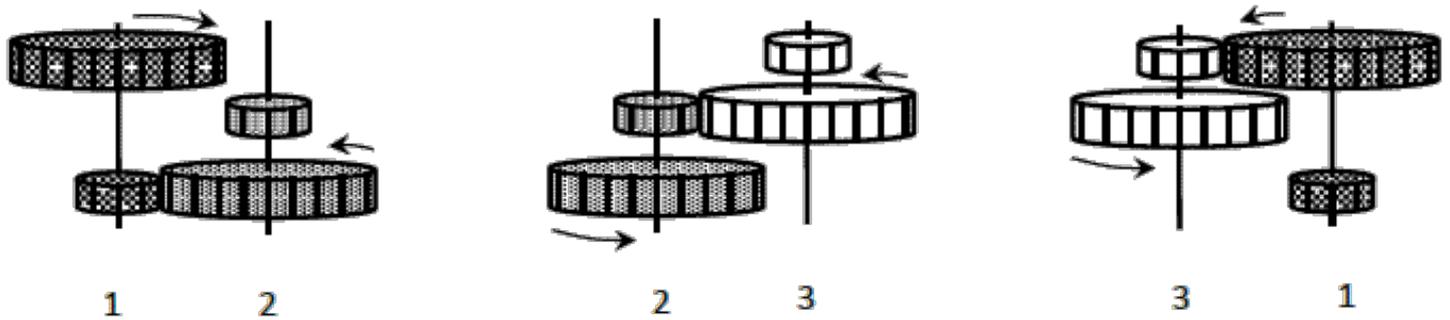


Рис. 3. Три «нетранзитивные» двойные шестерни.

Примечания. 1 – первая двойная шестерня, 2 – вторая двойная шестерня, 3 – третья двойная шестерня. При попарных соединениях двойных шестерен 1 и 2 ось 1 вращается быстрее оси 2, при попарных соединениях двойных шестерен 2 и 3 ось 2 вращается быстрее оси 3, при попарных соединениях двойных шестерен 1 и 3 ось 3 вращается быстрее оси 1.

Одной из особенностей этого комплекса заданий является возможность представления циклических отношений объектов в наглядной форме, что позволяет давать их детям, начиная с дошкольного возраста. Для конструирования таких объектов достаточно имеющихся подручных средств: кусков пластилина или пенопласта, шестерней из детского конструктора, кусков картона, красок и т.д. Вместе с тем этот комплекс задач не является конечным. На основе общей детерминистской схемы (см. рис. 1) читатели могут сконструировать и свои собственные объекты, находящиеся в циклических отношениях превосходства (доминирования, управления).

Для основной школы могут быть использованы более сложные задания, требующие от обучаемых более высокого уровня абстрактно-логического мышления, знаний основ комбинаторики и т.д. Комплекс таких задач, включающих и разработанные другими авторами, и оригинальные, сейчас разрабатывается и апробируется на занятиях с учениками Лицея Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» и со слушателями Школы юного психолога при факультете психологии НИУ ВШЭ (9–11-е классы). Приведем некоторые из них.

Нетранзитивные наборы карандашей

Есть три набора из 6 карандашей. Набор А состоит из 2 карандашей длиной по 2 см, 2 карандашей длиной по 4 см, 2 карандашей длиной по 9 см. Набор Б состоит из 2 карандашей длиной по 1 см, 2 карандашей длиной по 6 см, 2 карандашей длиной по 8 см. Набор В состоит из 2 карандашей длиной по 3 см, 2 карандашей длиной по 5 см, 2 карандашей длиной по 7 см. Каждый карандаш из одного набора сравнили с каждым карандашом из других наборов. Карандаши из какого набора чаще оказываются длиннее остальных?

Правильный ответ: карандаши из одного набора чаще оказываются длиннее карандашей из второго набора, карандаши из второго набора чаще оказываются длиннее карандашей из третьего набора, а те чаще оказываются длиннее карандашей из первого набора. Дело в том, что соотношения длин карандашей здесь воспроизводят структуру чисел на «нетранзитивных кубиках» Эфрона. Хотя задача про сравнение карандашей (в отличие от задач про бросания кубиков) является не вероятностной, а детерминистской, она основана на тех же комбинаторных рассуждениях, что и задачи про нетранзитивные кубики, и имеет ответ того же типа. Возможны и другие модификации задачи, с другими наборами объектов и оцениваемыми параметрами, например, «чаще тяжелее, чем», «чаще быстрее, чем», «чаще выигрывает, чем» и т.д.

Нетранзитивные спортивные команды (автор – T.Beardon)

Есть 9 бегунов (А, В, С, D, E, F, G, H, I), которые всегда финишируют в этой последовательности. Бегуны А, F, H входят в команду X; бегуны В, D, I – в команду Y; бегуны С, E, G – в команду Z. В каждом забеге встречаются по 2 команды (в первом забеге – команды X и Y, во втором – Y и Z, в третьем – X и Z). Бегуну, пришедшему к финишу первым в забеге, дается 6 баллов, второму – 5 баллов и т.д, последнему – 1 балл. Какая из команд будет объявлена победителем по итогам всех трех забегов?

Правильный ответ: Команда X выиграла у команды Y в первом забеге, набрав 11 очков (команда Y в этом забеге набрала 10 очков). Команда Y выиграла у команды Z во втором забеге, набрав 11 очков (команда Z в этом забеге набрала 10 очков). Команда Z выиграла у команды X в третьем забеге, набрав 11 очков (команда X в этом забеге набрала 10 очков). В итоге победитель не может быть объявлен ни по общему количеству очков (у каждой команды ровно по 21 набранному очку), ни по количеству побед в забегах (у каждой команды их по одному) [Beardon, n.d.]. Заметим, что поскольку реальные бегуны не бегают с такой стабильностью (соотношение между ними может меняться в силу разных причин), то можно заменить бегунов в условиях этой задачи на заводные машинки, приписав им конкретные фиксированные скорости, на механических лягушек, прыгающих на определенную высоту, и т.д.

Нетранзитивные выборы

В городе N с населением 1000 человек выбирают мэра. Используется ранжирующая система выборов, при которой каждый избиратель ранжирует всех кандидатов по их предпочтительности. Мониторинг показал, что 395 человек предпочли кандидата А кандидату Б, а кандидата Б – кандидату В; 335 человек предпочли кандидата Б кандидату В, а кандидата В – кандидату А; 275

человек предпочли кандидата В кандидату А, а кандидата А – кандидату Б. При общем подсчете голосов оказалось, что для большинства жителей города кандидат А предпочтительнее кандидата Б, а кандидат Б предпочтительнее кандидата В. Был проведен общий подсчет голосов. Какой из кандидатов является наиболее предпочтительным для большинства жителей?

Правильный ответ: при общем подсчете голосов кандидат А является предпочтительнее кандидата Б для 67% жителей, кандидат Б является предпочтительнее кандидата В для 73% жителей, но кандидат В оказывается предпочтительнее кандидата А для 61% жителей.

Идея, лежащая в основе этой задачи, принадлежит маркизу Мари Жану Антуану де Кондорсе. Суть этой идеи, более известной как «парадокс Кондорсе», заключается в том, что транзитивные индивидуальные предпочтения могут превращаться в нетранзитивные групповые. В более общей формулировке под этим парадоксом можно понимать любую форму выборов, в результате которой образуется цикл между альтернативами ввиду того, что каждая из них превосходит другую, но уступает третьей по большинству показателей (следующая задача).

Нетранзитивные ценные бумаги

Есть три вида ценных бумаг. Ценные бумаги А имеют наиболее высокий показатель доходности, средний показатель ликвидности, низкий показатель стабильности дохода. Ценные бумаги Б имеют наиболее высокий показатель ликвидности, средний показатель стабильности дохода, низкий показатель доходности. Ценные бумаги В имеют наиболее высокий показатель стабильности дохода, средний показатель доходности, низкий показатель ликвидности. Более выгодным является тот вид ценных бумаг, который при сравнении с другими видами ценных бумаг имеет более высокие показатели по большому количеству оценочных критериев. Какой вид ценных бумаг является наиболее выгодным?

Правильный ответ: отношение «быть выгоднее, чем» в данной задаче является комплексным, в связи с чем правило транзитивности в общем случае не может быть применено. При сравнении по правилу большинства каждый из трех видов ценных бумаг превосходит другой, но уступает третьему виду по двум показателям из трех.

При обучении решению таких задач варьированию может быть подвержена не только форма, в которой они предъявляются (набор условий и требований), но и сама постановка задачи. К примеру, учащийся должен не только уметь решать задачи, поставленные учителем, но и быть в состоянии придумывать их самостоятельно. Такой дидактический метод, постановка задачи самому придумать задачу, способствует развитию мышления учащихся и стимулированию углубленного понимания ими изучаемой предметной области. Эти задания могут быть полуструктурированными (придумать задачу на заданный принцип; задачу, похожую на уже решенную, и т.д.) или структурированными (придумать задачу с теми же данными, но с другим вопросом и т.д.). Авторы предлагают энтузиастам этой темы объединиться для конструирования заданий в этой области.

Нетранзитивность в играх

Принцип нетранзитивности превосходства является стержневым для игровой деятельности и лежит в основе базовой механики целого ряда игр. Наиболее известный пример – это игра «камень-ножницы-бумага». Циклическая структура отношений объектов этой игры послужила прототипом для разработанной в 2005 году игры Kruzno. В этой игре каждый игрок имеет три вида фигур: рыцарь, епископ и ладья (каждого по три). Ладья «бьет» епископа, епископ «бьет» рыцаря, рыцарь «бьет» ладью. Если на доске встречаются две одноименные фигуры, то они просто расходятся. Условие выигрыша – «выбить» все фигуры противника. Игра Kruzno внешне напоминает шашки или шахматы и может быть использована для развития мышления учащихся наряду с ними [About Kruzno, n.d.]. О других интеллектуальных играх, построенных на принципах парадокса Кондорсе и

игры «камень-ножницы-бумага», можно прочитать в работах [Чопоров, б.д.; Farrell, Wright, n.d.].

Использование принципа нетранзитивности отношений превосходства при проектировании компьютерных игр заставляет пересмотреть и их возможности в обучении. Например, в компьютерных играх "Warrior Kings", "Герои меча и магии III", "The Ancient Art of War" сильные в ближнем бою, но медленные боевые единицы – юниты (пехотинцы, дендроиды) проигрывают лучникам, поскольку не успевают к ним приблизиться. Лучники проигрывают более быстрым юнитам ближнего боя (кавалерия, пегасы, варвары), которые благодаря высокой скорости перемещения могут быстро к ним приблизиться и победить в ближнем бою. Но эти же быстрые юниты проигрывают более сильным в ближнем бою, но медленным юнитам. Сценарные взаимоотношения между юнитами могут иметь и более изощренный и сложный характер. Больше того, циклические отношения превосходства в компьютерных играх могут проектироваться не только между юнитами, но и между стратегиями действий. Есть три возможных стратегии ведения боя: 1) прямая атака; 2) обход с фланга; 3) укрепиться в обороне. Если у каждого из игроков одинаковое количество юнитов, то в такой ситуации прямая атака выигрывает у флангового обхода, так как последний требует определенных перестроений, и атака приходится в незащищенную зону. По аналогичной причине обход с фланга предпочтительнее против обороняющегося противника, но оборона предпочтительнее против прямой атаки (согласно закону фон Клаузевица и математическому обобщению Ланчестера, успешность прямой атаки достигается только при перевесе сил 3 к 1). Очевидно, что для победы в заданных условиях требуется способ рассуждений, отличный от привычного со школьной скамьи «транзитивного», использование которого здесь будет приводить к гарантированным ошибкам. Чем чаще игроки в надежде выиграть будут делать ставку на один из игровых объектов, ошибочно считая его самым «сильным», тем чаще в ответ от более опытных игроков вместо желаемого подчиненного объекта будут получать доминирующий и проигрывать. Таким образом, компьютерные игры могут не только развлекать, но и развивать мышление учащихся при адекватном подборе моделей. В настоящее время информационные технологии создают принципиально новые возможности для освоения нового учебного содержания и организации учебного процесса, в том числе в области овладения транзитивностью-нетранзитивностью, что, к сожалению, недостаточно используется в обучении.

Заключение

Правило транзитивности превосходства, успешно работающее в одном пространстве ситуаций (при сравнении относительно простых, одномерных объектов), не может быть использовано в другом пространстве ситуаций: при сравнении более сложных объектов – многомерных, взаимодействующих друг с другом, обладающих вероятностными свойствами. Понимание нетранзитивности отношений превосходства – не менее важная, но более сложная линия когнитивного развития, чем понимание транзитивности. Это две взаимосвязанные линии развития познания, и изучать их тоже нужно во взаимной связи. Но в когнитивной психологии крайне мало экспериментальных исследований мышления в ситуациях, когда рациональны именно нетранзитивные выборы, а следование правилу транзитивности является ошибкой. Аналогичная ситуация наблюдается в обучении – учебные материалы и задачи, раскрывающие механизмы нетранзитивности превосходства, представляют редкость. Эту асимметрию можно и нужно серьезно корректировать. Опора на правило транзитивности как на аксиому и использование в обучении только тех объектов и ситуаций, на которые распространяется это правило, может формировать у учащихся упрощенные и ложные представления о его универсальности, ложную установку на его всеобщую применимость в любых ситуациях. Данная установка может приводить к ошибочным умозаключениям о превосходстве во множестве ситуаций сравнения объектов, объективно находящихся в нетранзитивных отношениях превосходства. И это при том, что сравнительные оценки по критерию превосходства являются одними из ключевых в мышлении и принятии решений. Возможный выход состоит в специальной психолого-педагогической работе, направленной на разработку учебного содержания, материалов и задач, раскрывающих для учащихся механизмы нетранзитивности превосходства, закономерности в этой области отношений, критически важные случаи, и вовлекающей в самостоятельное творческое осмысление и понимание сложной

реальности.

Финансирование

Исследование выполнено при поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2014 году.

Литература

Богданов И.И. Нетранзитивные рулетки. В кн.: Математическое просвещение. М.: МЦНМО, 2010. Сер. 3, вып. 14, с. 240–255.

Гарднер М. [Gardner M.] Крестики-нолики. М.: Мир, 1988.

Гарднер М. [Gardner M.] Путешествие во времени. М.: Мир, 1990.

Грабовский В.И. Эволюционное возникновение стратегий поведения «камень-ножницы-бумага». http://nature.air.ru/models/rock_paper_scissors.htm#Модели

Пермогорский М.С. Нетранзитивность конкурентного поведения видов в биотических сообществах. Журнал общей биологии, 2014, 75(3), 226–233.

Пермогорский М.С. Эффект установки при решении задач, связанных с пониманием переходности отношений. Мир психологии, 2015. (в печати)

Пиаже Ж. [Piaget J.] Психология интеллекта. СПб.: Питер, 2003.

Поддьяков А.Н. Изменение представлений о непереходности превосходства под влиянием ознакомления с «нетранзитивными» объектами. В кн.: В.А. Барабанщиков (Ред.), Современная экспериментальная психология. М.: Институт психологии РАН, 2011. Т. 2, с. 193–205. <http://publications.hse.ru/view/74121690>

Поддьяков А.Н. Непереходность (нетранзитивность) отношений превосходства и принятие решений. Психология. Журнал Высшей школы экономики, 2006, 3(3), 88–111. <http://psy-journal.hse.ru/data/2011/04/26/1210581923/88-111.pdf>

Федоров Б.И., Зубань Е.Н., Любимов Г.П., Никитин В.Е. Элементы логической культуры. СПб.: Спец. лит., 1996.

Чопоров В. Прекрасная игра – нетранзитивность. <http://tesera.ru/article/ingredients1>

Ушаков Д.В., Белова С.С., Валуева Е.А. От психологии творчества к методологии психологии: к 90-летию со дня рождения Якова Александровича Пономарева. Психологический журнал, 2011, 32(2), 125–132.

About Kruzno. <http://www.kruzno.com>

Ainley S. Mathematical puzzles. New Jersey: Prentice-Hall, 1978.

Bar-Hillel M., Margalit A. How vicious are cycles of intransitive choice? Theory and Decision, 1988, 24(2), 119–145.

Beardon T. Transitivity. <http://nrich.maths.org/1345>

- Boddy L. Interspecific combative interactions between wood-decaying basidiomycetes. *FEMS microbiology ecology*, 2000, 31(3), 185–94.
- Bond A.B., Kamil A.C., Balda R.P. Social complexity and transitive inference in corvids. *Animal Behaviour*, 2003, 65(3), 479–487. doi:10.1006/anbe.2003.2101
- Bryant P.E., Trabasso T. Transitive inferences and memory in young children. *Nature*, 1971, 232(5311), 456–458. doi:10.1038/232456a0
- Davis H. Transitive inference in rats (*Rattus norvegicus*). *Journal of Comparative Psychology*, 1992, 106(4), 342–349. doi:10.1037/0735-7036.106
- Farrell J., Wright D. Non-transitive word games. <http://digitalcommons.butler.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3980&context=wordways>
- Fishburn P.C. Nontransitive preferences in decision theory. *Journal of Risk and Uncertainty*, 1991, 4(2), 113–134.
- Gardner M. On the paradoxical situations that arise from nontransitive relations. *Scientific American*, 1974, 231(4), 120–125.
- Gillian D.J. Reasoning in the chimpanzee: II. Transitive inference. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 1981, 7(2), 150–164. doi:10.1037/0097-7403.7.1.1
- Grosenick L., Clement T.S., Fernald R.D. Fish can infer social rank by observation alone. *Nature*, 2007, 445(7126), 429–432. doi:10.1038/nature05511
- Kerr B., Riley M.A., Feldman M.W., Bohannan B.J.M. Local dispersal promotes biodiversity in a real-life game of rock–paper–scissors. *Nature*, 2002, 418, 171–174. doi:10.1038/nature00823
- Kirkup B.C., Riley M.A. Antibiotic-mediated antagonism leads to a bacterial game of rock–paper–scissors in vivo. *Nature*, 2004, 428, 412–414. doi:10.1038/nature02429
- Lazareva O.F., Smirnova A.A., Bagozkaja M.S., Zorina Z.A., Rayevsky V.V., Wasserman E.A. Transitive responding in hooded crows requires linearly ordered stimuli. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 2004, 82(1), 1–19. doi:10.1901/jeab.2004.82-1
- MaClean E.L., Merritt D.J., Brannon E.M. Social complexity predicts transitive reasoning in prosimian primates. *Animal Behavior*, 2008, 76(2), 479–486. doi:10.1016/j.anbehav.2008.01.025
- Mou Y., Province J.M., Luo Y. Can infants make transitive preferences. *Cognitive Psychology*, 2014, No. 68, 98–112. doi:10.1016/j.cogpsych.2013.11.003
- Paz-y-Mico C.G., Bond A.B., Kamil A.C., Balda R.P. Pinyon jays use transitive inference to predict social dominance. *Nature*, 2004, 430(7001), 778–781. doi:10.1038/nature02723
- Poddiakov A. Intransitivity cycles, and complex problem solving. Paper presented at the 2nd mini-conference "Rationality, Behavior, Experiment"; Moscow, September 1–3, 2010. <http://ssrn.com/abstract=2498600>.
- Poddiakov A.N., Valsiner J. Intransitivity cycles and their transformations: how dynamically adapting systems function. In: J. Valsiner, L. Rudolph (Eds.). *Mathematical models for research on cultural dynamics: qualitative mathematics for the social sciences*. London: Routledge, 2012. pp. 297–347.

Reichenbach T., Mobilia M., Frey E. Mobility promotes and jeopardizes biodiversity in rock–paper–scissors games. *Nature*, 2007, 448, 1046–1049. doi:10.1038/nature06095

Roberts T.S. A ham sandwich is better than nothing: Some thoughts about transitivity. *Australian Senior Mathematics Journal*, 2004, 18(2), 60–64.

Shafir S. Intransitivity of preferences in honey bees: support for "comparative" evaluation of foraging options. *Animal Behaviour*, 1994, 48(1), 55–67. doi:10.1006/anbe.1994.1211

Sinervo B., Lively C. The rock–paper–scissors game and the evolution of alternative male strategies. *Nature*, 1996, 380(6571), 240–243.

Tversky A. Intransitivity of preferences. *Psychological review*, 1969, 76(1), 31–48. doi:10.1037/h0026750

Waite T.A. Intransitive preferences in hording gray jays (*Perisoreus canadensis*). *Behavioral Ecology and Sociobiology*, 2001, 50(2), 116–121. doi:10.1007/s002650100346

Поступила в редакцию 15 мая 2014 г. Дата публикации: 31 октября 2014 г.

[Сведения об авторах](#)

Пермогорский Михаил Сергеевич. Магистр психологии, стажер-исследователь, научно-учебная лаборатория когнитивных исследований, Высшая школа экономики (Национальный исследовательский университет), ул. Мясницкая, д. 20, 101000 Москва, Россия.
E-mail: mpermogorskiy@hse.ru

Поддьяков Александр Николаевич. Доктор психологических наук, профессор, факультет психологии, Высшая школа экономики (Национальный исследовательский университет), ул. Мясницкая, д. 20, 101000 Москва, Россия; главный научный сотрудник, Центр прогнозирования и проектирования образовательных систем "Федеральный институт развития образования", Москва, Россия.
E-mail: apoddiakov@hse.ru

[Ссылка для цитирования](#)

Стиль psystudy.ru

Пермогорский М.С., Поддьяков А.Н. Понимание нетранзитивности превосходства и разработка учебных «нетранзитивных» материалов и задач. *Психологические исследования*, 2014, 7(37), 3. <http://psystudy.ru>

Стиль ГОСТ

Пермогорский М.С., Поддьяков А.Н. Понимание нетранзитивности превосходства и разработка учебных «нетранзитивных» материалов и задач // *Психологические исследования*. 2014. Т. 7, № 37. С. 3. URL: <http://psystudy.ru> (дата обращения: чч.мм.гггг). [Описание соответствует ГОСТ Р 7.0.5-2008 "Библиографическая ссылка". Дата обращения в формате "число-месяц-год = чч.мм.гггг" – дата, когда читатель обращался к документу и он был доступен.]

Адрес статьи: <http://psystudy.ru/index.php/num/2014v7n37/1037-permogorskiy37.html>

[К началу страницы >>](#)