Шварц А.Ю. Роль чувственных представлений в математическом познании и понимании математики

-

English version: [Shvarts A.Yu. The role of visual representations in mathematical cognition and understanding mathematics]
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия

Сведения об авторе
Литература
Ссылка для цитирования

Анализируется проблема чувственных представлений в математике с позиций деятельностного подхода. Чувственные представления математических понятий отражают схемы действий с наглядным материалом, а не объективные характеристики визуального материала, независимые от воспринимающего. Проводится принципиальное различие между внутренними и внешними средствами визуализации в математике: воспринятое изображение погружено субъектом в те схемы, согласно которым оно воспринимается и используется. Выявляются общие корни чувственной и нечувственной интуиций в математике: интуиция позволяет ухватить схему действия с внешними знаковыми моделями. Предлагается рассматривать математическое понятие как координацию разного рода схем действий со знаково-символическими моделями, как пространственными, так и словесными и алгебраическими. Обсуждаются педагогические следствия изложенного взгляда на чувственные представления в математике.

Ключевые слова: наглядность, чувственные представления, схема, математическое мышление, математическое понятие, интуиция

Вопрос о роли опыта в достижении абстрактного знания является одним из вечных вопросов философии, а затем и психологии познания. Выбор математического знания не случаен: оно традиционно считается наиболее абстрактным и строгим, строящимся в отрыве от вмешательства чувственного опыта.

Однако длительные дискуссии в философии математики показывают, что математическое знание не может достигаться путем только формальных выводов. Даже уже полученное знание не может быть записано как набор строгих формальных выражений, каждое из которых выводится из изначально установленных аксиом [Беляев, Перминов, 1981]. Встает вопрос, какова же роль чувственных представлений в математическом познании и понимании математики.

Противоречия эмпирических данных и педагогических рекомендаций

Традиционный, восходящий к философии эмпиризма, взгляд полагает, что чувственные представления являются результатом воздействия внешних объектов. Математические объекты могут быть представлены во внешнем мире только своими моделями, потому как сами объекты математики не наблюдаемы в силу своей изначально конструктивной природы [Кассирер, 2006]. Подобные модели получили название визуальных репрезентаций (или визуализаций) математических понятий.

Как субъективные отчеты работающих математиков [Пуанкаре, 1989; Вейль, 1979], так и психологические данные [Крутецкий, 1968; Presmeg, 1986] показывают, что склонность к визуальным репрезентациям понятий и решению задач визуальными способами является индивидуально-специфической чертой. Пуанкаре говорит о существовании разных «типов» математических умов (аналитического и геометрического), каждый из которых необходим в математике. Психологи говорят о разных *способах* решения задач, не определяющих *успешность* их решения [Крутецкий, 1968]. Умение порождать и использовать визуальные модели не является ключевым в структуре математических способностей.

Однако такая «второстепенность» образных представлений в структуре математических способностей плохо сочетается с той первостепенной ролью, которая отводится визуальным средствам в педагогической и дефектологической литературе. Хотя принцип наглядности и раскритикован в отечественной психологической литературе, он продолжает широко пропагандироваться и применяться (см., например, [NCTM, 2000; Miller, Hudson, 2006]). Такого же мнения о необходимости преподавания математики на уровне наглядных очевидностей, а не абстрактных выкладок придерживаются многие серьезные математики: Л.С.Понтрягин [Понтрягин, 1980], В.И.Арнольд [Арнольд, 1999], П.С.Новиков [Новиков, 2006]. Все они протестуют против формализации математического образования, подчеркивая необходимость естественного изложения, не уходящего в формализм, в противовес современным требованиям обоснованности математического знания.

Особенно остро выявляется необходимость использования наглядных средств в обучении студентов со зрительными патологиями: отсутствие чувственной базы в обучении ведет к возникновению вербализма, то есть образованию понятий, за которыми не стоит реальных знаний, которые не соотносятся и не могут быть соотнесены с реальной практикой [Крогиус,1926; Литвак, 2006; Малых, 2004].

В ряде работ (например, [Dreyfus et al., 1990]), было показано, что студенты предпочитают использовать алгебраический способ решения задач. Данный феномен известен как феномен избегания визуализации. Эта тенденция обнаруживалась для простейших типов задач, стандартных и тестовых. По данным Стилиано и Сильвер [Stylianou et al., 2004] этот феномен исчезает, если рассматривать решения задач сильными студентами и брать творческие задачи. Тогда, наоборот, визуализации используются часто. Особенно значительную роль они играли в решении задач экспертами (математиками с ученой степенью): они обращались к визуализациям не только на первой стадии, в процессе понимания условий, но и на протяжении всего решения задач.

Намечаются следующие противоречия литературных данных. С одной стороны:
– использование образов отражает способ решения задач, но не влияет на получение результата: использующие и не использующие визуальные методы одинаково успешны;
– студенты предпочитают решать стандартные и тестовые задачи, не прибегая к визуальным методам.

Эти данные хорошо укладываются в концепцию существования наглядно-образного и вербально-логического мышления, первое из которых менее распространено у взрослых и для большинства является лишь этапом на пути возникновения второго.

С другой стороны,
– в решении более сложных задач более сильными студентами и экспертами визуальные методы широко применяются, причем эксперты используют визуальные репрезентации даже чаще, чем новички;
– несмотря на то что использование визуализаций не улучшает решения задач, педагоги, дефектологи, математики активно выступают за использование визуальных материалов в преподавании. Именно визуализации способствуют «пониманию» в обучении математике.

Таким образом, обнаруживается противоречие между необходимостью использования визуализаций в обучении, с точки зрения педагогов, и неохотным изучением и использованием наглядных средств учащимися, по данным эмпирических исследований. На данном этапе анализа остается непонятным, почему столь необходимый инструмент избегается и почему он так необходим, если эффективен только для небольшой группы студентов-визуализаторов.

Чувственное представление математического объекта: деятельностный подход

В обзоре по проблеме визуализации в обучении и преподавании математики ведущий западный специалист в данной области Н.Пресмег [Presmeg, 2006] специально разводит понятия внутренней и внешней визуализации: она использует термины «визуальный образ» (visual image) и «внешне зафиксированная модель» (inscription). Принципиальность данного различения станет ясна в ходе дальнейшего анализа природы визуального образа.

Образ восприятия активно конструируется субъектом, а не является пассивным отражением действительности. Уже Гельмгольц, а из более современных авторов Р.Л.Грегори [Грегори, 2009], рассматривают восприятие как процесс подтверждения гипотез: то есть никакой объект не порождает образ сам по себе, вне контекста человека, которым он будет воспринят.

В рамках деятельностного подхода идея активности процесса восприятия и конструктивности образа восприятия становится изначальной, базовой. Уже сама по себе чувствительность, не связанная еще никакой центрально-детерминированной интерпретацией (совершающейся при восприятии), заключает в себе взаимодействие данного субъекта с миром, а не воздействие объекта на субъекта. Принципиальные для понимания чувственности слова мы находим в первых строчках «Тезисов о Фейербахе» К.Маркса: «главный недостаток всего предшествующего материализма – включая и фейербаховский – заключается в том, что предмет, действительность, чувственность берется только в форме объекта, или в форме *созерцания,* а не как *человеческая чувственная деятельность, практика,* не субъективно» [Маркс, 1955].

Психологическое развитие эта идея получает в работе А.Н.Леонтьева [Леонтьев, 1972], посвященной изучению чувствительности, встроенной в систему целей и задач субъекта. При наличии некой задачи из сенсорного поля могут быть выделены какие-то качества, существенные для ее решения.

Применительно к анализу научных понятий такое понимание чувственности реализуется В.В.Давыдовым: «…органы чувств стали наблюдать и выделять в предметах такие свойства и отношения, которые были важны именно для подобной регуляции [планирования трудовой деятельности]. Так, глаз, например, стал выделять в предметах свойства, важные для обработки предметов в механическом отношении, при изменении их пространственной формы и т. д.» [Давыдов, 2000, с. 294]. Именно эти, погруженные во взаимодействие человека с миром, восприятия и ложатся в основу научных понятий: «Помимо ощущений и восприятий, сведения о внешней действительности человек получить не может, – но эта чувственность деятельна, она выступает лишь как момент предметной деятельности (это есть «*живое* созерцание»)» [Там же. С. 323]. Говоря о чувственности в научном познании, необходимо всегда учитывать, в какую деятельность включается эта чувственность, для решения каких задач разворачивается чувственное восприятие.

С одной стороны, «деятельная чувственность» ложится в основу теоретических понятий, с другой стороны, само теоретическое знание определяет, то, как будет протекать восприятие. «В зависимости от уровня и содержания наших знаний мы не только по-иному рассуждаем, но и по-иному непосредственно воспринимаем то, что нам дано; наши знания отражаются в нашем восприятии действительности» [Рубинштейн, 2002, с. 414]. Социальный опыт проникает в наглядно-образное мышление (и в само восприятие), осев «в определенных способах оперирования с вещами» [Там же], которые и определяют то, как будет воспринят объект.

Восприятие наглядного материала, уже включив в себя социальные способы действия, предстает субъекту как непосредственное: «Продукты теоретического мышления, реализуясь на практике, входят в сферу непосредственно данного. Поэтому то, что на одной стадии развития может быть предметом только опосредованного знания и теоретического опосредованного мышления, включается на следующей стадии в непосредственный опыт и оказывается в поле зрения наглядного мышления…» [Там же].

К аналогичному пониманию непосредственного восприятия приходит и П.Я.Гальперин: в основе одномоментного схватывания «лежит динамический стереотип обобщенного, сокращенного и автоматизированного умственного действия» [Гальперин, 1957, с. 423]. Воспринимающий сразу же, даже не осознавая этого, включает объект в определенные операции и, как результат, видит объект целостным с уже выделенными существенными чертами: «…от наличных раздражителей мы непосредственно переходим к результатам этого действия – к выявленной им совокупности черт известного предмета. И последний выступает перед нами сразу как одновременно данная система – образ. Этот факт – превращение результата действия в "непосредственное восприятие"…» [Там же].

Это означает, что в ходе овладения математикой изменяется и непосредственное восприятие: другими становятся чувственные представления, которые затем ложатся в основу формирующихся понятий. То есть сами *чувственные представления могут рассматриваться только в контексте целостной структуры понятия*. Таким образом, как будет непосредственно воспринят предложенный визуальный материал, детерминируется не объектом восприятия, а теми действиями, в которые будет автоматически включаться внешняя репрезентация математического объекта. Например, для тополога фигура рассматривается в контексте ее гомеоморфных (непрерывных, сохраняющих точки разрывов) преобразований (действие 1), и тогда треугольник оказывается «очень похож» на круг. А для геометра, смотрящего на фигуры как на разложимые в простейшие элементы – точки, прямые, плоскости (действие 2) – треугольник и круг совершенно различны.

Итак, существенное отличие внешних изображений математических понятий заключается в том, что они *не содержат «рекомендаций» по восприятию и использованию данного изображения,* тогда как внутренние репрезентации уже включают в себя схемы их включения в деятельность. Как именно будет воспринят нарисованный на доске график, определяется тем, в какие умственные операции студент умеет и будет включать это изображение, а также контекстом той задачи, к которой приводится рисунок. Внутренняя, мысленная репрезентация математического понятия уже включает в себя способ ее использования в ходе математической деятельности, способ ее соотнесения с формальной стороной этого понятия. В приложении к педагогическим вопросам внешняя чувственная модель может считаться визуализацией математического понятия только для субъекта, который способен (умеет, научен) адекватно воспринимать внешний воздействующий объект (то есть строить адекватное чувственное представление) и правильно соотносить чувственное представление с формальными и вербальными представлениями понятия.

Тогда чувственное представление математического объекта должно пониматься не как «картинка» на бумаге или в сознании, а как «динамическая схема»: образ, сохраняющий информацию о пространственных характеристиках, и при этом определенным образом встроенный в практику по его использованию. Если чувственное представление «правильное», то есть оно репрезентирует математические понятия или рассуждения, то оно встроено в социальную практику, предполагающую определенные схемы восприятия зрительно-пространственных изображений, и способы соотнесения изображений с другими репрезентациями этого объекта.

Проблема восприятия наглядных материалов и построения моделей теоретических понятий достаточно широко исследована в отечественной психологии в рамках деятельностного подхода (Н.Г.Салмина, И.С.Якиманская и др.). Мы же приведем эмпирические данные, полученные психологами, не анализирующими восприятие наглядности как деятельность. Ценность этих данных в том, что теоретически предсказанные закономерности наблюдаются на более широком математическом материале и в ходе исследований в рамках другой методологии.

Эмпирические подтверждения деятельностной природы чувственности в математике

Каково чувственное представление, возникающее у студента в процессе рассматривания графика функции y = 2x + 5 (см. рис. 1).

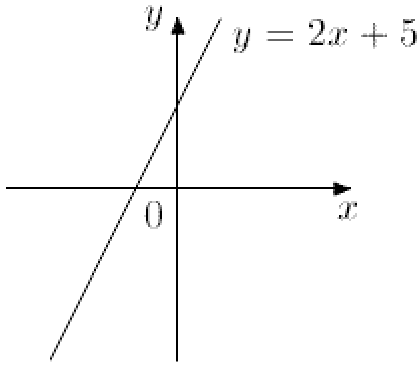

Рис. 1. График линейной функции.

Крутая гора, вздымающаяся вправо? Или крест, рассеченный на две неравные части? Преподаватели ждут, что учащийся, анализируя график функции, обратит внимание на наклон прямой и на точки пересечения с осями координат, на то, в каких четвертях график уходит на бесконечность… Но именно ли эти действия лежат за «непосредственным» восприятием учащегося, которое становится затем чувственной базой понятия линейной функции?

Именно этому вопросу посвящена большая часть работы израильского психолога А.Аркави. Раскрывая роль визуальных репрезентаций в математическом образовании и математике, он показывает, как вынесение существенных аспектов материала во внешний визуальный план позволяет «видеть невидимое». Закономерности, изначально скрытые за непрозрачностью (или неоднозначностью) статистических данных, идеи решения задач, оттененные дополнительными данными, предстают в виде ярких, мгновенно схватываемых, доступных непосредственному созерцанию образов. То есть правильно построенная зрительная репрезентация делает сложное умозаключение доступным чувственному восприятию [Arcavi, 2003]. С другой стороны, одни и те же схематические изображения могут быть по-разному восприняты в зависимости от предварительного знакомства субъекта с данной системой изображения. Аркави ссылается на неопубликованное исследование Маджисон (Magidson, 1989), в котором студенты, рассуждая о сходстве построенных ими в графическом модуляторе графиков функций $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = 3x + 1$, $f(x) = 4x + 1$, указывали, например, на то, что все они начинаются с левого края. Понятно, что грамотный человек никогда не обратит на это внимания.

Анализируя индивидуальные случаи, психологи математического образования показывают, как чувственное представление может становиться не наглядным пособием, а, наоборот, фактором, затрудняющим понимание и использование математических понятий.

Так, Эд Дубински с коллегами [Edwards et al., 2005] рассказывает об использовании специальным образом связанной салфетки для пояснения понятия гиперболической плоскости. При этом одной студентке эта модель позволяла эффективно работать с изучаемым понятием: строить предположения о том, являются ли линии прямыми в гиперболическом пространстве. Другой студент, основываясь на своем восприятии вязаной салфетки, полагал, что гиперболическая плоскость «колеблющаяся» и «растягивающаяся». Он так и не смог усвоить изучавшееся понятие. Принципиально важным Дубински и его коллеги считают, что успешная ученица всегда осознавала имеющийся у нее образ салфетки именно как модель, а не как непосредственное изображение гиперболической плоскости. Такое восприятие физического объекта как модели позволило сконцентрироваться на существенных в данном вопросе характеристиках и абстрагироваться от свойств, привнесенных конкретной реализацией.

В исследовании [Aspinwall et al., 1997] показывается, как ошибка в умственной репрезентации графика привела к сложностям в понимании понятия «производная». Студент представлял ветви параболы идущими вертикально вверх и полагал, что производная квадратичной функции изменяется как x^3: при возрастании аргумента производная должна очень быстро стремиться к бесконечности, раз график функции становится вертикальным. Лишь проанализировав несоответствие этого результата результату, полученному алгебраически ($(x^2)' = 2x$), студент осознал ошибочность своих представлений и начал соотносить два способа репрезентации понятия. В другом исследовании [Presmeg, 1992] верно воспринятая модель неадекватно связывалась с алгебраической репрезентацией понятия. Пауль в ходе решения задач на каноническое уравнение параболы ($y^2 = 2px$) использовал образ, созданный на основе графика параболы $y = x^2$. В итоге неверное предположение о симметричности графика привело к ошибкам в решении.

На основе этих примеров Норма Пресмег с соавторами [Aspinwall et al., 1997] говорит о контролируемых и неконтролируемых образах, из которых только первые в действительности служат формированию адекватных математических представлений. Необходимо «педагогическое воздействие» при введении графического материала в курс математического анализа, именно это позволит избежать возникновения у студентов «неконтролируемых» образов, а математический смысл операций с графиками ляжет в основу все более сложных понятий. Одно лишь представление графиков с целью активации воображения может стать преградой к овладению соответствующим понятием, а не улучшить понимание, как это часто предполагают.

То есть мы видим, что говорить о наглядном материале как репрезентации математического понятия можно лишь в контексте тех операций и взаимоотношений, в которые этот материал будет включен субъектом.

Особенно четко это видно при предъявлении пространственных моделей незрячим. Представленные в виде рельефных или рельефно-точечных изображений, наглядные инструменты оказываются значительно более необычным объектом для восприятия незрячими, чем аналогичные изображения для зрячих. Поэтому недостаточно показать картинку, надо еще и научить, как ее воспринять, говорят дефектологи. Для опознания различных геометрических фигур необходимо специально учить тактильному прослеживанию формы, включать наглядные средства в заранее простроенную деятельность по опознанию, классификации и т.п. [Денискина, 1979].

Оказывается, для возникновения пространственного представления о замкнутости фигуры недостаточно однократного ощупывания, а нужно 20–24 переобследований рельефного изображения, организованных логическим мышлением [Плаксина, 1985]. Без специального обучения возникают трудности выделения существенных признаков рельефного изображения [Островская, 1976]. В целом, следует включить наглядность в необходимые умственные операции и действия, для того чтобы она могла быть использована незрячими [Воронин, 1985]. Если опосредованность восприятия для зрячего прячется за каждодневной привычностью этих операций, в обучении незрячих природа восприятия как действия по организации ощущений, и даже как действия по сознательному построению образа, всплывает особенно отчетливо.

Итак, мы полагаем чувственное представление существующим всегда в контексте тех действий, которые к нему могут быть (и должны быть) применены, то есть рассматриваем образ как след мыслительной деятельности. Покажем, как такой «деятельностный» взгляд на чувственные представления позволяет разрешить намеченные выше противоречия.

Чувственное представление математического понятия может быть сформировано лишь по мере овладения всем понятием в целом, то есть по мере выстраивания схем работы с понятием и, соответственно, с визуальным материалом. Тогда естественным оказывается избегание визуализаций более слабыми студентами, математические понятия которых остаются однобокими и используются согласно стандартным схемам. Чувственные модели требуют правильного восприятия, которому обычно не уделяется внимания: предъявленный наглядный материал считается очевидным именно в силу его наглядности. И оказывается, что в отсутствие прописанных, надежных стратегий работы с наглядными моделями эти визуальные средства и вовсе избегаются.

Стремление педагогов включить наглядные инструменты в преподавание математических конструкций полностью оправданно: если студенты все же сумеют правильно воспринять предлагаемое изображение и «привязать» чувственное представление адекватным образом, их понимание данного математического объекта не просто обогатится, но и насытится теми интуициями, которые содержит предлагаемый образ сам по себе, тем опытом, который они имеют в обращении со зрительным материалом. Например, представление графика синуса (синусоиды) делает естественным предположение о его дифференцируемости в любой точке (отсутствии «переломов») именно в силу того, что для кривой естественно быть гладкой. А для незрячего эта естественность отсутствует и аналогичный рельефный график может быть трансформирован в чередование горбов, направленных то вверх, то вниз (материалы интервью) (см. рис. 2).

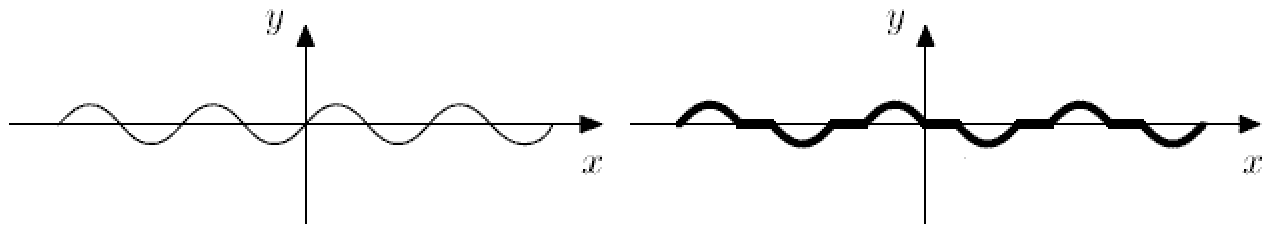

Рис. 2. График функции sin *x* и его трансформация незрячим студентом.

Наглядность чувственных моделей: схематические образы

Положение о том, что наглядные материалы не всегда оказываются иллюстрирующими, встречается уже в работах Р.Арнхейма [Арнхейм, 2008]. Он отмечает, что мысль не может быть подхвачена из образа, «словно насморк». И полагает, что для того чтобы идея могла быть воспринята из хорошего пространственного изображения, рисунок должен быть представлен в структурно ясной форме.

М.Джонсон [Johnson, 1987], опираясь на работы как И.Канта, так и Р.Арнхейма, выделяет абстрактные понятия, «богатые» образы и промежуточный между ними класс явлений, называемый «образные схемы». Он полагает, что этот последний класс является ключевым для процессов понимания. Н.Пресмег [Presmeg, 1992] на материале наглядных материалов в математическом обучении выдвигает предположение, что переход от богатых образов к абстрактным понятиям непрерывен и идет по пути все большего абстрагирования схем от деталей. Встает вопрос о том, какие из образных явлений существенны для математического познания и понимания математики. Исследования показывают, что влияние на успешность решения задач оказывает использование схематических образов, тогда как более богатые, реалистические изображения только отвлекают от решения [Hegarty et al., 1999; Campbell et al., 1995]. Особенно это выражено у учеников слабых и средней силы, сильные, по всей видимости, способны сами выделять нужное из детализированных изображений [Van Garderen, Montague, 2003].

Однако остаются вопросы, что означает «представленность образа в структурно ясной форме» (Р.Арнхейм), что обеспечивает схематическим изображениям большую наглядность? Если рассматривать образ как след мыслительной деятельности, как результат действия по построению образа, то схематическое изображение позволяет вскрывать его содержание «естественным путем», используя те схемы действий, которые актуализируются при непосредственном восприятии. А для того, чтобы увидеть нужную закономерность в «богатом» образе, полном незначительных деталей, нужно применить специальные схемы восприятия, сознательно осуществить такие действия, которые выделят только существенное. При этом яркие детали, бросающиеся в глаза при «естественном» взгляде на образ, будут опущены.

Таким образом, хорошие схематические изображения сами, без предварительного обучения, несут в себе способы действий с понятиями, которые дальше следует вычленить и научиться переносить на другие ситуации. А «богатые», насыщенные деталями образы не выявляют специфически математических путей анализа объекта, не вскрывают его существенных аспектов. Поэтому именно схематические изображения способствуют решению задач, в отличие от детализированных изображений.

Согласно ряду наблюдений (например, [Грегори, 2009]), все большая схематизация и большая условность изначально реалистических изображений привела к формированию письменного языка и других условных обозначений. Это заставляет нас предположить, что из использования символических систем рождается такая же интуиция, как и из работы с пространственными моделями.

Интуиции (созерцания) «не чувственной» природы

Далее мы рассмотрим следствие из предложенной нами точки зрения на чувственные представления, которое позволит снять противопоставление двух типов математического мышления и математических областей, намеченное в начале, объединить геометрическое и топологическое с алгебраическим и аналитическим мышлением.

Единство чувственного и логического в мышлении утверждается многими психологами. С точки зрения Рубинштейна, «логическое абстрактное мышление неотрывно от всей чувственно-наглядной основы. Логическое и чувственно-наглядное образуют не тожество, но единство. Это единство проявляется в том, что, с одной стороны, мышление исходит из чувственного созерцания и включает в себя наглядные элементы, с другой стороны – само наглядно-образное содержание включает в себя смысловое содержание. Наглядное и отвлеченное содержание в процессе мышления взаимопроникают друг в друга и друг в друга переходят» [Рубинштейн, 2002, с. 396].

В.М.Веккер [Веккер, 1998] представляет мышление как постоянный перевод с языка пространственно-предметных структур на символически-операторный язык речевых сигналов. Я.А.Пономарев [Пономарев, 1967] указывает на существование во вторичной, означенной, модели надстроечного уровня и базального, включающего в себя непосредственно пространственно-предметные отношения. Функционирование надстроечной части всегда опосредовано чувственными представлениями. Именно это отделяет собственно мышление как психический процесс от логического вывода.

Что же оказывается этими двумя языками, двумя частями модели в случае систем математического знания? Математический язык, на котором записаны все научные результаты, – это только одна сторона мышления и знания – формальная. Посмотрим на примеры чувственной составляющей. Для евклидовой геометрии чувственным основанием становится наше каждодневное восприятие, для геометрии Лобачевского строятся модели, которые могут подпирать абстрактные выкладки (см., например, [Прасолов, 2004]), для топологии возникает чувственность, отражающая специальный, топологический, анализ пространственных объектов. Что же занимает место чувственности в алгебре? В формальной логике?

Из самоотчетов великих математиков мы знаем, что следует предполагать существование интуиций нечувственного характера.

Анри Пуанкаре предполагает, что помимо чувственной интуиции существует «Интуиция чистого числа, интуиция чистых логических форм», которая «как раз озаряет и направляет тех, кого мы назвали *аналитиками*»[Пуанкаре, 1989, с. 217]. Психологам и метафизикам Пуанкаре предоставляет решать вопрос о том, «менее ли глубока, чем кажется с первого взгляда, пропасть, которая разделяет их [чувственную и логическую интуиции]? Окажется ли при внимательном рассмотрении, что эта чистая интуиция сама по себе не может обойтись без помощи чувств?» [Там же].

Отказываясь решать этот вопрос, Пуанкаре дает, тем не менее, некоторый намек на его решение, описывая способ мышления своего учителя: «Когда беседовали с Эрмитом, он никогда не прибегал к чувственному образу, и, однако, вы скоро заметили бы, что самые абстрактные сущности были для него живыми существами. Он не видел их, но чувствовал, что они не представляют собой искусственного подбора, что у них есть какой-то принцип внутреннего единства» [Там же].

К аналогичным выводам приходит Жан Дьедонне, один из основателей группы Н.Бурбаки, выступавшей за формализацию математики. Помимо пространственной интуиции, он выделяет еще алгебраическую, комбинаторную интуиции, интуицию перехода к бесконечности и вообще такое множество интуиций, сколько существует различных по способу действования и представления математических областей: «Чтобы описать современное бурное кипение идей, надо было бы говорить о больших конструкциях, где сливаются не одна-две, а полдюжины интуиций» [Дьедонне, 1982, с. 20].

Интуиции не чувственной природы, по мнению Дьедонне, развиваются постепенно, по мере знакомства с объектом: «изучая вопрос, понемногу начинают осваиваться в незнакомой стране; привыкая, приходят к умению угадывать, что должно произойти, когда встречают данный математический объект, и какой инструмент нужно применить для его исследования» [Там же, с. 8].

Что же может лежать за этой не чувственной интуицией, позволяющей «чувствовать» абстрактные свойства вещей, на чем она основывается, как достигается? Обратимся к тексту Р.Грегори [Грегори, 2009], помня, что отправной точкой его анализа является процесс восприятия.

Грегори говорит о способности «видеть» «суть вещей» (то есть вскрывать их функциональное значение) не только в чувственно богатой картине механических взаимодействий и пространственных расположений, представленных на реалистичных чертежах, но и в системах, где функциональные отношения далеко отошли от внешнего вида объекта. Оказывается, что, «рассмотрев детали схемы и способы их соединения, радиоинженер видит функциональное значение схемы и ее деталей» [Грегори, 2009, с. 197]. Точно так же хороший студент «видит» наклонную прямую графиком функции.

Математические обозначения действуют по тому же принципу: выделяют функциональное значение и абстрагируют его от незначительных деталей. «Можно сказать, что именно язык – речь, язык математики и специализированные языки <...> – позволяет нам изучать возможные последствия предполагаемых действий, которые совершаются в сферах, не доступных ни сенсорному восприятию, ни реалистическому изобразительному мастерству» [Там же]. Переход от изображений к символам рассматривается Р.Грегори как постепенный: от реалистических изображений ко все более свернутым изображениям функционально важных деталей. В итоге получается абстрактная запись, понять которую возможно, лишь владея соответствующей письменностью или системой знания. Р.Грегори проводит аналогию между историческим развитием иероглифического письма и развитием современной системы обозначений в электротехнике.

Итак, в первой части данной работы мы рассматривали чувственные представления не как поставляемые органами чувств от объектов внешнего мира, а как конструируемые в ходе восприятия, сообразно усвоенным схемам предметных действий. Тогда суть чувственной интуиции не в непосредственном схватывании, синтезе, созерцании, если вспомнить Канта, отношений внешнего мира, а в опыте взаимодействия с миром и схватывании тех отношений, которые выделяются как существенные именно в контексте этого взаимодействия. Теперь проявляются общие черты чувственной и не чувственной интуиций. *Если за чувственной интуицией лежит специальным образом организованный опыт работы с пространственными объектами и моделями, то за алгебраической интуицией должен стоять опыт работы с символическими системами.*

Получается, что, несмотря на различную природу (чувственный или знаковый характер), эти интуиции занимают одинаковое место в математическом познании по своей функции. Наделять понятие конкретным значением, связывать абстракцию с решением реальных задач – такова функция интуиции в понимании понятий. То есть для математики характерно стирание границ между наглядными и знаковыми (в узком смысле) моделями, как это описано у Р.Грегори: и схема, и знаковая система передают функциональные, то есть существенные, отношения. Тогда место базальной части вторичной, «означенной», модели (по Я.А.Пономареву) может занимать не обязательно первичная модель-изображение, фиксирующая предметные действия с объектами, но также вторичная модель предыдущего уровня, отражающая сама по себе функционирование знаковой системы.

Это объясняет феномен, на который указывают математики: при достаточно длительной работе в соответствующей области исследователь приобретает интуицию оперирования объектами этой области, подобную чувственной интуиции, позволяющую одномоментно схватывать ситуацию в целом, видеть не просто изолированный предмет деятельности, но саму деятельность и ее закономерности.

С точки зрения Ж.Дьедонне, все интуиции объединяются между собой центральной – интуицией переноса интуиций из одной области в другую. Например, перенося интуиции двумерного и трехмерного случаев, математик имеет представление о четырехмерной плоскости. Интуиция переноса позволяет не только обобщить представления на более широкий класс случаев, но и более разносторонне ухватить объекты, соотнося интуиции разных репрезентаций: «есть теория, которая одновременно является линейной или полилинейной алгеброй и геометрией. Их разъединяет лишь язык, но он же и оказывает огромную помощь, так как позволяет в каждый момент более или менее точно подыскать сходные интуитивно знакомые ситуации и перенести интуицию из этих ситуаций на случаи более сложные» [Дьедонне, 1982, с. 12]. На психологическом языке мы говорили бы о нескольких репрезентациях одного понятия и переходе между ними. Ценность нескольких репрезентаций выявляется и при изучении математических понятий студентами. Специальные задания на перевод функций из алгебраической репрезентации в графическую или вербальную улучшают понимание [Gagatsis, 2004]. Однако, как отмечают авторы, не существует полного соответствия между двумя репрезентациями, напротив, каждая репрезентация поставляет информацию о некоторых аспектах понятия, вытекающих из опыта работы с соответствующим материалом.

Теперь мы можем выдвинуть рабочее определение *математического понятия как координации разного рода схем работы с соответствующим объектом, каждая из которых протекает в своей модели и опирается на интуицию, основанную на опыте соответствующих действий*. Сходного взгляда на природу математического понятия придерживается один из ведущих российских философов математики В.Я.Перминов, близкие идеи излагает в своих работах Эд Дубински [Dubinsky, 2000].

При этом не существует принципиального отличия действий с пространственными моделями от действий с другими знаковыми системами: они так же разворачиваются в пространстве и времени, так же должны сворачиваться в некие представления, пригодные для дальнейшего анализа. Мы полагаем, что понятие схемы, берущее начало от философии И.Канта (1994), позволяет вместить как чувственные, так и подобные «квазичувственные» представления о способах действия со знаково-символическими моделями. Р.Грегори пишет, что горизонт развития человеческого познания зависит от того, «в какой мере мозг человека способен справиться с концепциями, чуждыми опыту, полученному с помощью органов чувств». С нашей точки зрения, это должно быть переформулировано следующим образом: человеческое познание будет простираться до тех пор, пока механизмы синтетического схватывания, подобные чувственному созерцанию, будут улавливать существенные черты взаимодействия с объектами, все на большее число опосредующих ступеней уходящими от реальных предметов и их реалистических изображений. Мы не видим теоретического ограничения для количества таких ступеней, потому как для индивидуального сознания в ходе конкретного мыслительного акта нет необходимости разворачивать все уровни базовых моделей, а квазичувственные схемы могут оперировать знаками любого уровня опосредованности.

Специфика и необходимость чувственных моделей в математическом образовании

Каково же значение именно чувственных материалов, пространственных моделей для обучения математике, исходя из проведенного нами анализа?

Очевидно, что сам по себе формализм не отражает содержания понятия: выученное формальное определение не дает представления о том, что же скрывается за данным понятием. Для понимания у учащегося должны быть схемы функционирования определения или способы подбора соответствующих понятию знаково-символических моделей. Соответственно, изучение любого понятия должно либо опираться на житейский или более ранний опыт работы с пространственными конструкциями, либо выстраивать новый опыт, создавая тем самым новые схемы работы с визуальным или алгебраическим материалом. При этом привилегированное положение пространственных моделей как средств овладения понятиями, по сравнению с алгебраическими и другими репрезентациями, заключается в наличии изначального опыта пространственного восприятия, тогда как изначальный опыт работы с алгебраической знаковой системой, как правило, отсутствует.

Наиболее четко эту идею фиксирует современный философ и математик В.Босс: «Геометрическая интерпретация имеет то преимущество, что она дана как бы априори, и геометрический факт, как правило, легко объяснить даже новичку» [Босс, 2003, с. 21]. Тогда как для возникновения понимания на основе других источников требуется «стадия предварительного обучения и привыкания к специальным категориям мышления» [Там же]. Именно это, с нашей точки зрения, лежит в основе всестороннего требования наглядности со стороны педагогов, часто не учитывающих, что нельзя рассчитывать на то, что студент «увидит» на графике, диаграмме, модели то же самое, что видит преподаватель. Так же, как для работы с алгебраическими моделями, для работы с пространственными моделями часто необходимо специальное обучение.

Означает ли это, что предложение учителем наглядной репрезентации математического понятия всегда оптимально? Всем ли вообще в обучении необходимы знаково-символические модели понятий? А.Н.Колмогоров, выдающийся отечественный математик, помимо своих научных результатов, славен еще и величайшей научной школой, им основанной: количество людей, полагающих себя его учениками, огромно. Известно (см. [Явление чрезвычайное…, 1999]) при этом, что его способы преподавания были крайне жесткими и ориентированными на формальное изложение. П.С.Новиков отмечает, что «у него были странные, я бы сказал психические, отклонения: в образовании – школьном и университетском – он боролся с геометрией, изгонял комплексные числа, стремился всюду внедрить теорию множеств, часто нелепо» [Новиков, 2006]. Как же сочетается «гениальный учитель» и столь категоричная характеристика математиком и физиком с мировым именем?

Осмелимся предложить следующую интерпретацию. Колмогорова не интересовало математическое образование всех и каждого, он был нацелен на воспитание ученых-математиков. Его формальная стратегия оправдана в обучении сильных: изучение математического понятия именно в наиболее абстрактном виде дает свободу (а значит, место творчеству) в поиске для него интерпретационных моделей и позволяет использовать интуиции самого разного рода, развивая и продвигая само понятие. Однако такой подход оказывается пагубным в обучении слабых студентов, где цель обучения – не создать условия для новых математических открытий, а достичь понимания, позволяющего использовать математическое знание в прикладной работе. Студенты не математического профиля не способны самостоятельно находить интерпретационные модели для абстрактных выражений понятий, для них формально введенное понятие так и остается оторванным от своего значения.

Выводы

1. Согласно проведенному анализу, чувственные представления в математике отражают свернутый опыт предметных действий с пространственными объектами. В сознании конкретного индивида изображение неотрывно связано со способами его использования и восприятия. Именно это включение знаково-символической модели в активную деятельность субъекта и порождает чувственные представления. Правильное изображение может не только не прояснять математические рассуждения, но и, наоборот, мешать усвоению материала, если соответствующие способы работы с ним не выстроены.

2. Сопоставляя чувственные и нечувственные интуиции (алгебраические, логические и д.р.), мы приходим к выводу, что в функциональном отношении они занимают одно и то же место в математическом рассуждении и овладении понятиями. Их задача – наполнять понятийные конструкции содержанием конкретных действий по преобразованию знаково-символических моделей. Вне зависимости от природы моделей, их пространственного или знакового содержания действия разворачиваются в пространстве и времени. Мы полагаем, что механизмы синтетического схватывания способов действия едины в работе с любыми знаково-символическими моделями.

3. Для фиксации способа действия как ключевого момента в математическом мышлении мы используем понятие схемы, берущее начало от философии И.Канта. Само математическое понятие в

психологическом плане должно быть представлено не как формальное определение, а как координация множества схем, отражающих способы действия с разными моделями. Каждая из моделей, выступающих предметом действия для данного понятия, может, в свою очередь, являться свернутым действием по преобразованию модели более низкого уровня. Таким образом, механизмы схватывания способов действия будут работать на все более далеких от конкретных предметов и их изображений уровнях.

4. В ходе обучения математическое понятие не должно быть представлено как формальная структура. Оно может быть прояснено только через реализацию схем работы со знаково-символическими моделями. Однако для правильного восприятия наглядных материалов (то есть знаково-символических моделей) требуется специальное обучение, которому, как правило, не уделяется достаточного внимания. Необходимо учитывать, что студент воспринимает изображение не так, как это кажется естественным для педагога.

Выражение признательности
Автор благодарит А.Н.Кричевца за детальное обсуждение всех изложенных в работе материалов.

Литература

Арнольд В.И. Антинаучная революция и математика // Вестник российской академии наук. 1999. Т. 69, N 6. С. 553–558.

Арнхейм Р. [Arnheim R.] Визуальное мышление: пер. с англ. // Психология мышления: хрестоматия по психологии / под ред. Ю.Б.Гиппенрейтер и др. 2-е изд., перераб. и доп. М.: АСТ: Астрель, 2008. С. 182–190.

Беляев Е.А., *Перминов В.Я.* Философские и методологические проблемы математики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.

Босс В. Интуиция и математика. М.:Айрис-пресс, 2003.

Вейль Г. [Weyl H.] Математическое мышление: пер. с англ. и нем. / под ред. Б.В.Бирюкова, А.Н.Паршина. М.: Наука, 1989.

Веккер Л.М. Психика и реальность. Единая теория психических процессов. М.: Смысл, 1998.

Воронин В.М. Психолого-педагогические аспекты обучения учащихся с нарушениями зрения с применением компьютерной техники // Дефектология. 1985. N 1. С. 49–55.

Гальперин П.Я. О формировании чувственных образов и понятий: материалы совещания по психологии (июль 1955). М.: Изд-во АПН РСФСР, 1957. С. 417–425.

Грегори Р. [Gregory R.] Разумный глаз: Как мы узнаем то, что нам не дано в ощущениях / пер. с англ. А.И.Когана. Изд-е 3-е. М.: Либроком, 2009.

Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении: Логико-психологические проблемы построения учебных предметов. М.: Педагогическое общество России, 2000.

Денискина В.З. Особенности овладения слепыми школьниками элементами геометрии и навыками черчения и некоторые методические рекомендации // Дефектология. 1979. N 4. С. 45–49.

Дьедонне Ж. [Dieudonné J.] Абстракция и математическая интуиция / пер. с фр. Н.Я.Виленкина, Л.Г.Петерсон // Математики о математике. М.: Знание, 1982. С. 6–21.

Кант И. [Kant I.] Критика чистого разума / пер. с нем. Н.Лосского. М.: Мысль, 1994.

Кассирер Е. [Cassirer E.] Познание и действительность / пер. с нем. Б.Столпнера, П.Юшкевича. М.: Гнозис, 2006.

Крогиус А.А. Психология слепых и её значение для общей психологии. Саратов: [б.и.], 1926.

Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1968.

Леонтьев А.Н. Проблемы развития психики. 3-е изд. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972.

Литвак А.Г. Психология слепых и слабовидящих. СПб.: Каро, 2006.

Малых Р.Ф. Обучение математике слепых и слабовидящих младших школьников: учеб. пособие. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И.Герцена. 2004.

Маркс К. [Marx K.] Тезисы о Фейербахе // Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения: пер. с нем. 2-е изд. М.: Госполитиздат, 1955. Т. 3. С. 1–4.

Новиков С.П. Вторая половина XX века и ее итог: кризис физико-математического сообщества в России и на западе // Вестник ДВО РАН. 2006. Вып. 4. С. 3–22.

Островская Е.Б. Формирование представления о замкнутом пространстве у слепых и частично видящих младших школьников // Дефектология. 1976. N 2. С. 54–57.

Плаксина Л.И. Как научить слабовидящего ребенка видеть и понимать окружающий мир // Дефектология. 1985. N 1. С. 87–88.

Пономарев Я.А. Знание, мышление и умственное развитие. М.: Просвещение, 1967.

Понтрягин Л.С. О математике и качестве ее преподавания // Коммунист. 1980. N 14. С. 99–112.

Прасолов В.В. Геометрия Лобачевского. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.

Пуанкаре А. [Poincare A.] Интуиция и логика в математике // Пуанкаре А. О науке / под ред. Л.С.Понтрягина; пер. с фр. С.Г.Суворова. М.: Наука, 1989. С. 205–218.

Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии. СПб.: Питер, 2000.

Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове: сб. ст. М.: ФАЗИС: МИРОС, 1999.

Arcavi A. The role of visual representations in the learning of mathematics // Educational studies in mathematics. 2003. Vol. 52(3). P. 215–241

Aspinwall L., Shaw K.L., Presmeg N.C. Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative // Educational Studies in Mathematics. 1997. Vol. 33(3). P. 301–317.

Campbell K.J., Collis K.F., Watsn J.M. Visual processing during mathematical problem solving // Educational studies in mathematics. 1995. Vol. 28(2). P. 177–194.

Dreyfus T., Eisenberg T. On difficulties with diagrams: theoretical issues // G.Booker, P.Cobb, T. de Mendicuti (Eds.). Proceedings of the 14th PME International Conference, 1990. Vol. 1. P. 27–36.

Dubinsky E. Mathematical literacy and abstraction in the 21st century // School Science and Mathematics. 2000. Vol. 100(6). P. 289–297.

Edwards B.S., Dubinsky E., McDonald M.A. Advanced mathematical thinking // Mathematical Thinking and Learning. 2005. Vol. 7(1). P. 15–25.

Gagatsis A., Shiakalli M. Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to

Another and Mathematical Problem Solving // Educational Psychology. 2004. Vol. 24(5). P. 645–657.

Hegarty M., Kozhevnikov M. Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving // Journal of educational psychology. 1999. Vol. 91(4). P. 684–689.

Johnson M. The body in the mind: the bodily basis of meaning, imagination and reason. Chicago: University of Chicago Press, 1987.

Miller S.P., Hudson P.J. Helping students with disabilities understand what mathematics means // Teaching exceptional children. 2006. Vol. 39(1). P. 28–35.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM, 2000.

Presmeg N.C. Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics // Educational studies in mathematics. 1992. Vol. 23(6). P. 595–610.

Presmeg N.C. Visualization and mathematical giftedness // Educational studies in mathematics. 1986. Vol. 17. P. 297–311.

Presmeg N.C. Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology // A.Gutierrez, P.Boero (Eds.). Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future. 2006. P. 205–235.

Stylianou D.A., Silver E.A. The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: an examination of expert-novice similarities and differences // Mathematical thinking and learning. 2004. Vol. 6(4). P. 353–387

Zazkis R., Dubinsky E., Dauterman J. Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the group D4. Journal for research in mathematics education. 1996. Vol. 27(4). P. 435–457.

Van Garderen D., Montague M. Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities // Learning disabilities research and practice. 2003. Vol. 18(4). P. 246–254.

Поступила в редакцию 7 марта 2011 г. Дата публикации: 30 июня 2011 г.

Сведения об авторе

Шварц Анна Юрьевна. Аспирант (2011), факультет психологии, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, ул. Моховая, д. 11, стр. 9, 125009 Москва, Россия.
E-mail: shvarts.anna@gmail.com

Ссылка для цитирования

Шварц А.Ю. Роль чувственных представлений в математическом познании и понимании математики [Электронный ресурс] // Психологические исследования: электрон. науч. журн. 2011. N 3(17).
URL: http://psystudy.ru (дата обращения: чч.мм.гггг). 0421100116/0024.
[Последние цифры – номер госрегистрации статьи в Реестре электронных научных изданий ФГУП НТЦ "Информрегистр". Описание соответствует ГОСТ Р 7.0.5-2008 "Библиографическая ссылка". Дата обращения в формате "число-месяц-год = чч.мм.гггг" – дата, когда читатель обращался к документу и он был доступен.]

К началу страницы >>